**Mathematical Methods in Earth Sciences**

강의 11 – 2018년 5월 23일

**벡터의 적분**

공간상에 어떤 벡터의 분포를 벡터함수 로 나타낼 경우 벡터의 적분에 대해서 살펴보자. 벡터의 적분은 크게 두가지가 있다.

**선적분(line integral)**

첫번째는 특정한 경로상의 각 점에서 그 선로와 평행하는 의 성분만을 그 경로를 따라 적분하는 것으로 다음과 같이 나타낼 수 있다.

여기서 는 경로 상의 각 점에서의 접선방향의 단위벡터를 의미한다. 특히 적분 경로 이 폐곡선인 경우에는 적분표시를 표시한다.



공간의 함수로 주어진 벡터장 에 대하여 두 점 와 가 있다고 하자. 그리고, 적당한 곡선 가 있어서 이 곡선이 두 점 를 연결한다고 가정하자. 이 때에 곡선 를 따르는 선적분(line integral)을

로 정의한다. 이 때에 는 곡선 를 따라 있으며, 그 크기는 일 때에 0으로 한없이 가까워진다. 여기에서, 선적분의 구체적인 값은 경로 에 따라 달라질 수 있음을 기억하자.

**(예제)** 아래 그림과 같이 P(1,1,0)에서 Q(2,4,0)까지 두 개의 경로 가 있다고 하자. 벡터장 로 주어졌을 때에 두 경로에 따른 선적분을 구해보자.



먼저,을 따라서는 P에서 R까지 이고, 이다. 또한, R에서 Q까지 이고, 이다. 그러므로,

한편, 경로 를 따라서는이고

시작점과 끝점이 같음에도 불구하고, 선적분의 값은 다르다. 즉, 선적분은 주어진 벡터장에 대하여 시작점과 끝점 그리고, 두 점을 연결하는 곡선 에 따라 달라진다.

**선적분의 활용**

선적분의 대표적인 예제는 힘장(force field)에서 물체가 움직일 때에 물체가 하는 일(work)이다. 물체가 한 장소 에서 이웃 장소 로 이동할 때에 힘장에 의하여 이 곳에서 힘 를 받는다. 이 때에 물체의 이동에 든 일()은 힘과 위치 이동 두 벡터의 내적인

으로 주어진다. 따라서, 힘장이 주어진 지역에 있는 두 점 과 이 두 점을 연결하는 곡선 를 생각할 때에 물체를 에서 로 를 따라 움직일 때에 들어간 일은

으로 정의된다.



**(예제)** 중력가속도장에서 물체가 중력을 받아서 물체에 중력이 하는 일을 표현해보자. 물체에 가해지는 중력은 이므로,

와 같이 나타난다.

**(예제)** 지표면에서 나타나는 균일한 중력가속도장 를 생각하자. 물체를 원점에서 위치까지 옮기는 데에 필요한 일을 다음의 경로에 대해서 구해보자. 에서 축을 따라서 , 다시 축에 나란하게 , 다시 축에 나란하게 로 이동하는 경로

(풀이)

(1) 축을 따라서

(2)축을 따라서

(3) 축을 따라서

전체 적분값은 가 된다. 이 적분은 물체의 위치에너지와 관련이 있다.

**면적분(area integral)**

벡터 적분의 두 번째는 벡터함수의 성분 중에서 페곡면 를 수직으로 관통하는 성분에 대해서만 면적분하는 경우

여기서 은 적분면 상의 각 점에서의 법선방향의 단위벡터를 나타내며, 적분은 이중적분을 나타낸다. 앞의 선적분과 마찬가지로 적분영역 가 페곡면인 경우에는 적분표시를 구별하여 표시한다.

 

**서로 다른 좌표계에서의 적분**

두가지 벡터의 적분을 수행하기 위해서는 미소길이 벡터 과 미소면적 벡터 를 적절한 직각좌표계로 표시해야 한다.

(직각좌표계)

1. 길이 방향의 미소길이(벡터량)

2. 면적에 수직방향의 미소면적(벡터량)

3. 미소부피(스칼라량)

4. 미분연산자(벡터량)



(원통좌표계)

1. 미소길이

2. 미소면적

3. 미소부피

4. 미분연산자



(구면좌표계)

1. 미소길이

2. 미소면적

3. 미소부피

4. 미분연산자



**(예제)** 벡터 에 대해 원점을 중심으로 반지름 인 구의 표면에서 를 구하라. (힌트: 구의 표면을 관통하는 성분은 이므로 의 성분은 만 갖는다.)

**(예제)** 벡터 에 면적 를 방향으로 관통하는 면적분을 구하라. (힌트: 면적 를 관통하는 성분은 이다.)



**벡터의 발산의 재해석**

표면적 인 미소체적 로부터 외부로 빠져나가는 임의의 물리량인 벡터 의 총량을 미소체적 로 나눈 것을 벡터 의 발산이라 하며, 수학적으로 다음과 같이 표시한다.

따라서 벡터 의 방향은 체적을 감싸는 폐곡면 상의 법선방향을 가리키는데, 특히 체적의 내부로부터 외부로 빠져나가는 방향을 취해야만 한다.



위의 수식에 따르면 공간상에 분포한 벡터 에 대해 체적 를 감싸는 폐곡면 상에서의 적분은 다음과 같이 에 대한 체적적분과 동일하다.

이것을 발산정리(divergence theorem) 또는 가우스정리(Gauss theorem)이라 한다. 이는 면적분과 체적적분의 관계를 말해준다.

**발산정리의 물리적인 해석**



편의상 폐곡면 로 둘러 쌓인 임의의 체적을 라 하자. 에서 발산되는 총량은 각 미소체적에서의 발산을 전부 더하면 된다. 그런데 미소 체적 에서 경계면 을 통해 빠져나가는 양은 동일한 경계면 을 갖는 인접한 미소체적 에 전부 들어간다. 따라서 경계면 을 통한 발산은 0이 되며, 마찬가지로 체적 내에 있는 어떠한 경계면에서도 발산은 0이 된다. 그러므로 체적 에서의 발산되는 총량은 공통 경계면이 아닌 체적 의 폐곡면 를 통해 빠져나가는 총량과 같게 된다.

**(예제)** 벡터 일 경우 다음 그림과 같이 반경 3이고, 길이 10인 원통 내부에서 외부로 발산되는 총량을 구하라.



(풀이)

**벡터의 회전의 재해석**

임의의 물리량인 가 미소면적 를 감싸는 폐경로 을 따라 도는 성분이 존재할 경우 이 폐경로를 따라 벡터 를 선적분한 총량을 미소면적 로 나눈 것을 벡터 의 회전이라고 한다. 이를 수학적으로 표시하면 다음과 같다.

여기서 의 방향은 페곡선의 임의 방향을 취하면 되며, 다만 은 의 회전방향에 대해 오른손법칙을 적용시 엄지손가락 방향을 나타내는 단위벡터이어야 한다.



위 수식에 따르면 공간상에 분포한 벡터 에 대해 면적 를 감싸는 폐곡선 상에서의 적분은 다음과 같이 에 대한 면적분과 동일한다.

이것을 Stokes 정리(Stokes theorem)이라 부른다. 즉, 선적분과 면적분과의 관계를 나타낸다.

**Stokes 정리의 물리적 해석**



표면적 상의 미소 영역 주변의 회전을 고려하자. 인접한 두 미소영역의 공통된 경계면에서 회전은 서로 크기는 같고, 방향이 반대가 된다. 따라서 면적 의 내부 경계면에서의 회전들은 모두 상쇄되고, 남는 것은 미소영역들 간의 공통 경계면이 아닌 면적 의 경계인 폐곡선 을 따라 회전하는 양이다. 따라서 표면적 상의 모든 미소영역의 경계주변의 회전을 합하면 남는 것은 미소영역들 간의 공통 경계면이 아닌 면적 의 경계인 폐곡선 을 따라 회전하는 양이다.

(예제) 벡터 일 경우 그림과 같이 인 평면상에 부채꼴 모양의 폐경로 을 따라 회전하는 총량을 구하라.

